

Fiche 3

Exemples d'application des matrices

Objectif : A la fin de ce cours, l'apprenant devra être capable de construire des matrices.

Sommaire

3.1	Matrice de Leslie et dynamique des populations	16
3.2	Les chaînes de Markov Homogènes (CMH)	19
3.3	Exercices de travaux dirigés (TD)	22

3.1 Matrice de Leslie et dynamique des populations

La **matrice de Leslie** permet de modéliser l'évolution d'une population structurée en classes d'âge dont les coefficients (positifs) de fertilité et les probabilités (ou taux) de survie de chaque classe d'âge à la classe suivante sont connues. Par souci de simplicité, certaines caractéristiques telles que la migration par exemple, ne sont pas prises en compte et on suppose que la population dispose de ressources illimitées. Comme seules les femelles donnent la vie, on ne considère que les classes d'âge des femelles de la population.

Exemple 3.1 ¹ Considérons une population de rongeurs, en limitant les observations aux femelles dont la durée de vie maximale est 3 ans. Cette population est subdivisée en trois classes d'âges : *bébés* (1ère année), *jeunes* (2ème année) et *adultes* (3ème année) d'effectifs respectifs b_n , j_n et a_n l'année n . On sait que :

- le taux de survie est de 60% la première année et 25% la deuxième année
- chaque femelle donne naissance à 4 femelles au cours de sa deuxième année et à 5 femelles au cours de sa troisième année.

1. Müller (2018). *Algèbre linéaire*, <http://www.nymphomath.ch/MADIMU2/ALGEB/INDEX.HTM>

On note respectivement

$$X_n = \begin{pmatrix} b_n \\ j_n \\ a_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad X_{n+1} = \begin{pmatrix} b_{n+1} \\ j_{n+1} \\ a_{n+1} \end{pmatrix}$$

les vecteurs des effectifs lors de l'année n et l'année suivante $n+1$ et on cherche une relation entre X_{n+1} et X_n .

- La phrase « le taux de survie est de 60% la première année et 25% la deuxième année » signifie que :

$$j_{n+1} = 0.6b_n \quad \text{et} \quad a_{n+1} = 0.25j_n.$$

- La phrase « chaque femelle donne naissance à 4 femelles au cours de sa deuxième année et à 5 femelles au cours de sa troisième année » signifie que

$$b_{n+1} = 4j_n + 5a_n.$$

L'évolution cette population est donc décrite par les équations suivantes :

$$\begin{cases} b_{n+1} &= 4j_n + 5a_n \\ j_{n+1} &= 0.6b_n \\ a_{n+1} &= 0.25j_n \end{cases}$$

soit

$$\begin{pmatrix} b_{n+1} \\ j_{n+1} \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 5 \\ 0.6 & 0 & 0 \\ 0 & 0.25 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_n \\ j_n \\ a_n \end{pmatrix}$$

ou encore

$$X_{n+1} = LX_n \quad \text{avec} \quad L = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 5 \\ 0.6 & 0 & 0 \\ 0 & 0.25 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice L est appelée **matrice de Leslie** ou **matrice de projection de la population**).

Remarque 3.1 La matrice de Leslie porte le nom du statisticien anglais Sir Patrick Holt LESLIE (1900-1972) qui a développé, en 1945, un modèle mathématique pour décrire l'évolution temporelle du nombre de femelles dans des populations de souris et de rats. Cette étude tire sa motivation du fait que pendant la seconde guerre mondiale, la prolifération de ces rongeurs était un véritable souci en raison des dégâts qu'ils pouvaient occasionner au niveau des réserves alimentaires de la population anglaise. Le modèle mathématique mis au point par Leslie tient compte de la structuration de la population selon plusieurs classes d'âges. C'est un modèle discret car le temps y est considéré à intervalles réguliers et ne prend que des valeurs entières. Leslie a montré la pertinence de son modèle en l'appliquant à des données observées sur des rats, mais aussi sur d'autres populations animales. De nos jours, ce modèle est adopté par de nombreux biologistes.

Soit L une matrice de Leslie modélisant l'évolution d'une population structurée en classes d'âge telle que X_n représente le vecteur des effectifs au temps n et X_0 représente le vecteur des effectifs au temps initial (temps $n = 0$). De la relation $X_{n+1} = LX_n$, on déduit :

$$\begin{aligned} X_1 &= LX_0 \\ X_2 &= LX_1 = L^2 X_0 \\ X_3 &= LX_2 = L^3 X_0 \\ &\vdots \\ X_n &= L^n X_0. \end{aligned}$$

Ce qui conduit à la proposition suivante :

Proposition 3.1 *Soit L une matrice de Leslie modélisant l'évolution d'une population structurée en classes d'âge telle que X_n représente le vecteur des effectifs au temps n et X_0 représente le vecteur des effectifs au temps initial (temps $n = 0$). Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :*

$$X_n = L^n X_0.$$

Exercice d'application 3.1 Reprenons l'exemple 3.1. Si l'on suppose que la population initiale en 2018 ($n = 0$) compte 10 femelles dans chaque classe d'âge, combien y en aura-t-il en 2019 ? en 2020 ?

►►► *Indications :*

— L'année 2018 correspond à $n = 0$ et donc à $X_0 = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix}$.

— L'année 2019 correspond à $n = 1$ et donc à

$$X_1 = LX_0 = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 5 \\ 0.6 & 0 & 0 \\ 0 & 0.25 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 90 \\ 6 \\ 2.5 \end{pmatrix}.$$

— L'année 2020 correspond à $n = 2$ et donc à

$$X_2 = L^2 X_0 = \begin{pmatrix} 2.4 & 1.25 & 0 \\ 0 & 2.4 & 3 \\ 0.15 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36.5 \\ 54 \\ 1.5 \end{pmatrix}.$$

◇

3.2 Les chaînes de Markov Homogènes (CMH)

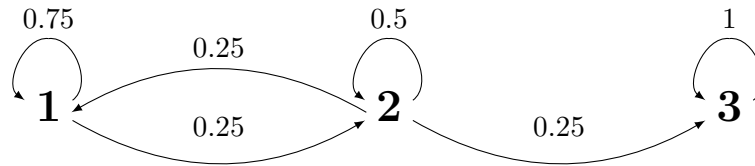
Les chaînes de Markov (CM) permettent de décrire l'évolution en temps discret $n \in \mathbb{N}$ d'une population dont les individus peuvent être répartis en plusieurs catégories (appelées **états**) et sont susceptibles de changer aléatoirement d'état du temps n au temps $n + 1$. On parle de Chaîne de Markov Homogène (CMH) lorsque les probabilités de passage d'un état à un autre sont fixes et ne dépendent pas du temps n .

Remarque 3.2 Une présentation rigoureuse des CMH nécessite des notions de théorie de probabilités dépassant largement le cadre de ce cours et qui seront simplement admises. Nous nous concentrerons donc plutôt sur l'aspect appliqué. Afin de faciliter la compréhension au lecteur, nous adopterons des notations légèrement différentes de celles habituellement utilisées pour les chaînes de Markov.

Illustrons les CMH à l'aide d'un exemple.

Exemple 3.2 Une épidémie se propage dans un troupeau de boeufs. Malgré l'administration d'un remède expérimental, on constate que chaque semaine, 25% des animaux malades guérissent tandis que 25% des malades meurent et 25% des animaux en bonne santé deviennent malades. On peut représenter la situation à l'aide d'une CMH à trois états : bien portant (1), malade (2) et mort (3).

On peut représenter le passage entre les trois états par le diagramme suivant :



Notons la répartition initiale des animaux sous la forme du vecteur

$$\pi^{(0)} = \begin{pmatrix} \pi_1^{(0)} \\ \pi_2^{(0)} \\ \pi_3^{(0)} \end{pmatrix}$$

(appelée **vecteur d'états initial**) où $\pi_i^{(0)}$ représente la proportion initiale des animaux se trouvant dans l'état i et $\sum_{i=1}^3 \pi_i^{(0)} = 1$. Soit

$$\pi^{(n)} = \begin{pmatrix} \pi_1^{(n)} \\ \pi_2^{(n)} \\ \pi_3^{(n)} \end{pmatrix}$$

la répartition au temps n où $\pi_i^{(n)}$ représente la proportion des animaux se trouvant dans l'état i au temps n et $\sum_{i=1}^3 \pi_i^{(n)} = 1$.

L'évolution de la population peut être décrite en cherchant une relation entre les vecteurs $\pi^{(n)}$ et $\pi^{(n+1)}$. On peut faire les déductions suivantes :

- les animaux bien portants au temps $n + 1$ ont deux origines possibles : soit ils étaient bien portants au temps n et ils le sont restés soit ils étaient malades et ils ont été guéris ; ce qui signifie que la proportion de bien portants au temps $n + 1$ est la somme de la proportion de bien portants parmi ceux qui étaient bien portants au temps n (75% des bien portants au temps n soit $0.75\pi_1^{(n)}$) et de la proportion de malades au temps n devenus bien portants (25% des malades au temps n soit $0.25\pi_2^{(n)}$) :

$$\pi_1^{(n+1)} = 0.75\pi_1^{(n)} + 0.25\pi_2^{(n)}.$$

- les animaux malades au temps $n + 1$ ont aussi deux origines possibles : soit ils étaient bien portants au temps n et ils sont devenus malades soit ils étaient malades et ils sont restés malades ; ce qui signifie que la proportion d'animaux malades au temps $n + 1$ est la proportion de nouveaux malades parmi les bien portants au temps n + la proportion de malades au temps n qui sont restés malades :

$$\pi_2^{(n+1)} = 0.25\pi_1^{(n)} + 0.5\pi_2^{(n)}.$$

- les animaux morts au temps $n + 1$ ont aussi deux origines possibles : soit ils étaient malades au temps n et ils sont morts soit ils étaient déjà morts au temps n ; ce qui signifie que la proportion d'animaux morts au temps $n + 1$ est la proportion de morts parmi les malades au temps n + la proportion de morts au temps n :

$$\pi_3^{(n+1)} = 0.25\pi_2^{(n)} + \pi_3^{(n)}.$$

On a donc

$$\begin{cases} \pi_1^{(n+1)} &= 0.75\pi_1^{(n)} + 0.25\pi_2^{(n)} \\ \pi_2^{(n+1)} &= 0.25\pi_1^{(n)} + 0.5\pi_2^{(n)} \\ \pi_3^{(n+1)} &= 0.25\pi_2^{(n)} + \pi_3^{(n)} \end{cases}$$

soit

$$\begin{pmatrix} \pi_1^{(n+1)} \\ \pi_2^{(n+1)} \\ \pi_3^{(n+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.75 & 0.25 & 0 \\ 0.25 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.25 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pi_1^{(n)} \\ \pi_2^{(n)} \\ \pi_3^{(n)} \end{pmatrix}.$$

soit encore

$$\pi^{(n+1)} = P\pi^{(n)} \quad \text{avec} \quad P = \begin{pmatrix} 0.75 & 0.25 & 0 \\ 0.25 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.25 & 1 \end{pmatrix}.$$

Définition 3.1 La matrice P est appelée **matrice de transition**. Elle est telle que

- pour tous $i, j \in \{1, 2, 3\}$,

p_{ij} = probabilité de passage de l'état j à l'état i

- la somme de chaque colonne de P vaut 1.

En partant d'une répartition initiale $\pi^{(0)}$, la relation $\pi^{(n+1)} = P\pi^{(n)}$ se traduit successivement par

$$\begin{aligned}\pi^{(1)} &= P\pi^{(0)} \\ \pi^{(2)} &= P\pi^{(1)} = P^2\pi^{(0)} \\ \pi^{(3)} &= P\pi^{(2)} = P^3\pi^{(0)}\end{aligned}$$

et au bout de n semaines, la répartition des animaux suivant les états est alors définie par

$$\pi^{(n)} = P^n\pi^{(0)}.$$

Exemple 3.2 (suite) Supposons qu'au départ tous les animaux sont bien portants c'est-à-dire

$$\pi^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Les répartitions au bout d'une semaine puis deux semaines sont respectivement données par

$$\pi^{(1)} = P\pi^{(0)} = \begin{pmatrix} 0.75 & 0.25 & 0 \\ 0.25 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.25 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.75 \\ 0.25 \\ 0 \end{pmatrix}$$

et

$$\pi^{(2)} = P^2\pi^{(0)} = \begin{pmatrix} 0.625 & 0.3125 & 0 \\ 0.3125 & 0.3125 & 0 \\ 0.0625 & 0.375 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.625 \\ 0.3125 \\ 0.0625 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, après deux semaines, on devrait observer 62.5% d'animaux bien portants, 31.25% d'animaux malades et 6.25% d'animaux morts.